

NOTA	
-------------	--

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA:

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Número de RUT:	Número de MATRICULA:	SECCIÓN:

Instrucciones: • **NO HAY CONSULTAS.**

- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Las respuestas desordenadas, no serán corregidas.
- Recuerde que debe realizar su prueba en su respectiva sección, de lo contrario será calificado(a) con nota mínima.
- Queda totalmente prohibido el uso de calculadoras programables
- Apagar y guardar sus **celulares**.

$$\text{Nota} = 1 + \frac{\text{Puntos}}{10}.$$

Duración= 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

- 1) Determine si las siguientes series convergen o divergen, en caso de convergencia, calcular su suma.

a) [5pt] $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2 + 3}{4k - 5k^2}$ b) [5pt] $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\ln 2)^k}{k!}$ c) [10pt] $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(16k^2 - 4)}$

Solución :

a) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^2 + 3}{4k - 5k^2} = -\frac{1}{5} \neq 0$

Por el criterio del término general la serie **diverge**.

5 pts

b) $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(\ln 2)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{(\ln 2)^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln 2}{k+1} = 0 < 1$

Por lo tanto el criterio del cuociente, la serie es **convergente**.

3 pts

Como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, si tomamos $x = \ln 2$, se tiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^k}{k!} = e^{\ln 2} = 2$$

2 pts

c) ■ $\frac{1}{(16k^2 - 4)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2 \cdot 2k - 1} - \frac{1}{2 \cdot 2k + 1} \right) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1} \right)$ **2,5 pts**

■ $\frac{1}{8} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k - 1} - \frac{1}{2k + 1} \right)$ es serie telescópica. **2,5 pts**

■ Suma parcial es $S_n = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{2k + 1} \right) \rightarrow \frac{1}{8}$ cuando $k \rightarrow \infty$ **2,5 pts**

■ Como el límite de la suma parcial existe la serie converge. Es decir

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(16k^2 - 4)} = \frac{1}{8}$$

2,5 pts

2) [10pt] Encuentre el intervalo de convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-3)^n}{n+2}$$

Solución :

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x-3| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+3} = |x-3|$ 2 pts
- La serie es absolutamente convergente si $-1 < x-3 < 1$. Es decir $2 < x < 4$. 2 pts
- • Si $x = 2$. Entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ converge (criterio de Leibniz) 2 pts
- Si $x = 4$. Entonces $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+2}$ diverge (serie armónica) 2 pts
- finalmente el intervalo de convergencia es $[2, 4[$. 2 pts

3) [10pt] Encuentre un valor aproximado de

$$\int_0^1 \sin(x^2) dx$$

usando los 3 primeros términos no nulos de la serie de $\sin(x^2)$.

Hint: $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Solución :

- $\sin(x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}, \forall x \in \mathbb{R}$ 3 pts
- $\int_0^1 \sin(x^2) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{4n+2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!}$ 5 pts
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+3)(2n+1)!} \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} \approx 0,3103$ 2 pts

4) Dada $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x - 4}$

a) [10pt] Determine una serie de potencias para $f(x)$

Hint: Se podría descomponer $f(x)$ en fracciones parciales.

Solución : $\frac{1}{x^2 - 3x - 4} = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{x - 4} - \frac{1}{x + 1} \right)$ 2 pts

$$= -\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{4 - x} \right)$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{x}{4}} \right)$$
2 pts

$$= -\frac{1}{5} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{4^{n+1}} \right)$$
2 pts

$$= -\frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{4^{n+1}} \right) x^n$$
2 pts

$$= \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1} 4^{n+1} - 1}{4^{n+1}} \right) x^n, \quad |x| < 1$$
2 pts

b) [10pt] Usando la serie encontrada en la parte a) pruebe que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4^{n+1} - 1}{4^{n+1} \cdot 2^n} = -\frac{20}{21}$$

Solución : Considerando $x = \frac{1}{2}$, tenemos que:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} - 4\right) \cdot \left(\frac{1}{2} + 1\right)} = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4^{n+1} - 1}{4^{n+1}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

5 pts

Luego

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4^{n+1} - 1}{4^{n+1} \cdot 2^n} = -\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = -\frac{20}{21}$$

5 pts